

# TENTATIVO DI UNA TEORIA DEI RAGGI $\beta$

Nota <sup>(1)</sup> di ENRICO FERMI

**Sunto.** - *Si propone una teoria quantitativa dell'emissione dei raggi  $\beta$  in cui si ammette l'esistenza del « neutrino » e si tratta l'emissione degli elettroni e dei neutrini da un nucleo all'atto della disintegrazione  $\beta$  con un procedimento simile a quello seguito nella teoria dell'irradiazione per descrivere l'emissione di un quanto di luce da un atomo eccitato. Vengono dedotte delle formule per la vita media e per la forma dello spettro continuo dei raggi  $\beta$ , e le si confrontano coi dati sperimentali.*

## **Ipotesi fondamentali della teoria.**

§ 1. Nel tentativo di costruire una teoria degli elettroni nucleari e dell'emissione dei raggi  $\beta$ , si incontrano, come è noto, due difficoltà principali. La prima dipende dal fatto che i raggi  $\beta$  primari vengono emessi dai nuclei con una distribuzione continua di velocità. Se non si vuole abbandonare il principio della conservazione dell'energia, si deve ammettere perciò che una frazione dell'energia che si libera nel processo di disintegrazione  $\beta$  sfugga alle nostre attuali possibilità di osservazione. Secondo la proposta di PAULI si può p. es. ammettere l'esistenza di una nuova particella, il così detto « neutrino », avente carica elettrica nulla e massa dell'ordine di grandezza di quella dell'elettrone o minore. Si ammette poi che in ogni processo  $\beta$  vengano emessi simultaneamente un elettrone, che si osserva come raggio  $\beta$ , e un neutrino che sfugge all'osservazione portando seco una parte dell'energia. Nella presente teoria ci baseremo sopra l'ipotesi del neutrino.

Una seconda difficoltà per la teoria degli elettroni nucleari, dipende dal fatto che le attuali teorie relativistiche delle particelle leggere (elettroni o neutrini) non danno una soddisfacente spiegazione della possibilità che tali particelle vengano legate in orbite di dimensioni nucleari.

<sup>(1)</sup> Cfr. la nota preliminare in « La Ricerca Scientifica », 2, fasc. 12, 1933.

Sembra per conseguenza più appropriato ammettere con HEISENBERG <sup>(1)</sup> che tutti i nuclei consistano soltanto di particelle pesanti, protoni e neutroni. Per comprendere tuttavia la possibilità dell'emissione dei raggi  $\beta$ , noi tenteremo di costruire una teoria dell'emissione delle particelle leggere da un nucleo in analogia alla teoria dell'emissione di un quanto di luce da un atomo eccitato nell'ordinario processo della irradiazione. Nella teoria dell'irradiazione, il numero totale dei quanti di luce non è costante; i quanti vengono creati all'atto della loro emissione da un atomo eccitato, e spariscono invece quando sono assorbiti. In analogia a ciò cercheremo di fondare la teoria dei raggi  $\beta$  sopra le seguenti ipotesi:

a) Il numero totale degli elettroni e dei neutrini non è necessariamente costante. Elettroni (o neutrini) possono essere creati o distrutti. Questa possibilità non ha per altro alcuna analogia con la possibilità della creazione o della distruzione di una coppia elettrone-positrone; se infatti si interpreta un positrone come un « buco » di DIRAC, si può considerare semplicemente quest'ultimo processo come un salto quantico di un elettrone da uno stato di energia negativa a uno di energia positiva, con conservazione del numero totale (infinitamente grande) degli elettroni.

b) Le particelle pesanti, neutrone e protone, possono considerarsi, secondo le vedute di HEISENBERG, come due diversi stati quantici interni della particella pesante. Formuleremo questo con la introduzione di una coordinata interna  $\rho$  della particella pesante, che sia suscettibile di assumere soltanto due valori:  $\rho = +1$ , se la particella è un neutrone;  $\rho = -1$ , se la particella è un protone.

c) La funzione Hamiltoniana del sistema complessivo, costituito da particelle pesanti e leggere, deve scegliersi in modo che ogni transizione da neutrone a protone sia accompagnata dalla creazione di un elettrone e di un neutrino; e che il processo opposto, trasformazione di un protone in un neutrone, sia accompagnato dalla sparizione di un elettrone e di un neutrino. Si noti che con ciò resta assicurata la conservazione della carica elettrica.

### Gli operatori della teoria.

§ 2. Un formalismo matematico che permette di costruire una teoria in accordo con i tre punti precedenti può costruirsi nel modo più facile per mezzo del metodo <sup>(2)</sup> di DIRAC-JORDAN-KLEIN detto della

<sup>(1)</sup> W. HEISENBERG, « ZS. für Phys. », **77**, 1, 1932; E. MAJORANA, « ZS. für Phys. », **82**, 137, 1933.

<sup>(2)</sup> Cfr. p. es. P. JORDAN e O. KLEIN, « ZS. für Phys. », **45**, 751, 1927; W. HEISENBERG, « Ann. d. Phys. », **10**, 888, 1931.

« seconda quantizzazione ». Noi considereremo dunque le ampiezze di probabilità  $\psi$  e  $\varphi$  degli elettroni e dei neutrini nello spazio ordinario, e le loro complesse coniugate  $\psi^*$  e  $\varphi^*$  come degli operatori; mentre per la descrizione delle particelle pesanti useremo la consueta rappresentazione nello spazio delle configurazioni, nella quale naturalmente anche  $\rho$  dovrà computarsi tra le coordinate.

Introduciamo dapprima due operatori  $Q$  e  $Q^*$  che operano sopra le funzioni della variabile a due valori  $\rho$  come le sostituzioni lineari

$$(1) \quad Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Si riconosce immediatamente che  $Q$  determina le transizioni da protone a neutrone, e  $Q^*$  le transizioni opposte da neutrone a protone.

Il significato delle ampiezze di probabilità  $\psi$  e  $\varphi$  interpretate come operatori è, come si sa, il seguente. Sia

$$\psi_1 \psi_2 \dots \psi_s \dots$$

un sistema di stati quantici individuali degli elettroni. Poniamo poi

$$(2) \quad \psi = \sum_s \psi_s a_s; \quad \psi^* = \sum_s \psi_s^* a_s^*$$

Le ampiezze  $a_s$  e le grandezze complesse coniugate  $a_s^*$  sono operatori che agiscono sulle funzioni dei numeri di occupazione  $N_1, N_2, \dots, N_s, \dots$  degli stati quantici individuali. Se vale il principio di PAULI, ciascuna delle  $N_s$  può prendere soltanto uno dei valori 0, 1; e gli operatori  $a_s$  ed  $a_s^*$  sono definiti al modo seguente:

$$(3) \quad \begin{aligned} a_s \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) &= (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_{s-1}} (1 - N_s) \Psi(N_1, N_2, \dots, 1 - N_s, \dots) \\ a_s^* \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) &= (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_{s-1}} N_s \Psi(N_1, N_2, \dots, 1 - N_s, \dots). \end{aligned}$$

L'operatore  $a_s^*$  determina la creazione, mentre l'operatore  $a_s$  determina la scomparsa di un elettrone nello stato quantico  $s$ .

Corrispondentemente alle (2) porremo per i neutrini:

$$(4) \quad \varphi = \sum \varphi_\sigma b_\sigma; \quad \varphi^* = \sum \varphi_\sigma^* b_\sigma^*$$

Gli operatori complessi coniugati  $b_\sigma^*$  e  $b_\sigma$  operano sulle funzioni dei numeri di occupazione  $M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots$  degli stati quantici individuali  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\sigma, \dots$  dei neutrini. Ammettendo che anche per questi corpuscoli valga il principio di PAULI, i numeri  $M_\sigma$  possono prendere soltanto i due valori 0, 1; e si ha

$$(5) \quad \begin{aligned} b_\sigma \Phi(M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots) &= (-1)^{M_1 + M_2 + \dots + M_{\sigma-1}} (1 - M_\sigma) \Phi(M_1, M_2, \dots, 1 - M_\sigma, \dots) \\ b_\sigma^* \Phi(M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots) &= (-1)^{M_1 + M_2 + \dots + M_{\sigma-1}} M_\sigma \Phi(M_1, M_2, \dots, 1 - M_\sigma, \dots). \end{aligned}$$

Gli operatori  $b_\sigma$  e  $b_\sigma^*$  determinano rispettivamente la sparizione e la creazione di un neutrino nello stato  $\sigma$ .

### La funzione Hamiltoniana.

§ 3. L'energia del sistema complessivo costituito dalle particelle pesanti e leggere, è la somma dell'energia  $H_{pes}$  delle particelle pesanti + l'energia  $H_{leg}$  delle particelle leggere + l'energia di interazione  $\mathcal{H}$  tra le particelle leggere e quelle pesanti.

Limitandoci per semplicità a considerare un solo corpuscolo pesante, scriveremo il primo termine nella forma

$$(6) \quad H_{pes} = \frac{1 + \rho}{2} \mathfrak{O} + \frac{1 - \rho}{2} \mathfrak{S}$$

in cui  $\mathfrak{O}$  e  $\mathfrak{S}$  sono gli operatori che rappresentano l'energia del neutrone e del protone. Si osservi infatti che per  $\rho = +1$  (neutrone) la (6) si riduce a  $\mathfrak{O}$ ; mentre per  $\rho = -1$  (protone) essa si riduce a  $\mathfrak{S}$ .

Per scrivere l'energia  $H_{leg}$  nel modo più semplice, prenderemo per stati quantici  $\psi_s$  e  $\varphi_\sigma$  degli elettroni e dei neutrini degli stati stazionari. Per gli elettroni prenderemo le autofunzioni nel campo coulombiano del nucleo (opportunamente schermato per tener conto dell'azione degli elettroni atomici); per i neutrini potremo prendere semplicemente delle onde piane di DE BROGLIE, poichè eventuali forze agenti sui neutrini sono certamente lievissime. Siano  $H_1, H_2, \dots, H_s, \dots$  e  $K_1, K_2, \dots, K_\sigma, \dots$  le energie degli stati stazionari degli elettroni e dei neutrini; avremo allora

$$(7) \quad H_{leg} = \sum_s H_s N_s + \sum_\sigma K_\sigma M_\sigma$$

Resta ancora da scrivere la energia di interazione. Questa consiste in primo luogo dell'energia coulombiana tra protone ed elettroni; nel caso di nuclei pesanti tuttavia, la attrazione esercitata da un solo protone non ha molta importanza <sup>(1)</sup> e in ogni caso non contribuisce in alcun modo al processo della disintegrazione  $\beta$ . Per non complicare inutilmente le cose non terremo dunque conto di questo termine. Dobbiamo invece aggiungere alla Hamiltoniana un termine tale da soddisfare alla condizione c) del § 1.

Un termine che accoppia necessariamente la trasformazione di un neutrone in protone con la creazione di un elettrone e di un neutrino ha, secondo i risultati del § 2, la forma

$$(8) \quad Q^* a_s^* b_\sigma^*$$

mentre l'operatore complesso coniugato

$$(8') \quad Q a_s b_\sigma$$

<sup>(1)</sup> La attrazione coulombiana dovuta ai numerosi altri protoni deve naturalmente tenersi in conto come un campo statico.

accoppia tra di loro i processi inversi (trasformazione di un protone in neutrone e sparizione di un elettrone e di un neutrino).

Un termine di interazione soddisfacente alla condizione  $c$ ) avrà dunque la forma seguente

$$(9) \quad \mathcal{H} = Q \sum_{s\sigma} c_{s\sigma} a_s b_\sigma + Q^* \sum_{s\sigma} c_{s\sigma}^* a_s^* b_\sigma^*$$

dove  $c_{s\sigma}$  e  $c_{s\sigma}^*$  sono grandezze che possono dipendere dalle coordinate, dai momenti, ecc... della particella pesante.

Una determinazione ulteriore di  $\mathcal{H}$  non può farsi altro che col criterio della massima semplicità; naturalmente tuttavia le possibilità di scelta della  $\mathcal{H}$  sono limitate dalla necessità che  $\mathcal{H}$  sia invariante rispetto a un cambiamento delle coordinate e che inoltre soddisfi la conservazione della quantità di moto.

Se in un primo tempo trascuriamo gli effetti relativistici e lo spin, la più semplice scelta per (9) è la seguente

$$(10) \quad \mathcal{H} = g[Q\psi(x)\varphi(x) + Q^*\psi^*(x)\varphi^*(x)]$$

in cui  $g$  è una costante avente le dimensioni  $L^5 M T^{-2}$ ;  $x$  rappresenta le coordinate della particella pesante;  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi^*$ ,  $\varphi^*$  sono date da (2) e (4) e debbono prendersi nella posizione  $x$ ,  $y$ ,  $z$  occupata dalla particella pesante.

La (10) non rappresenta in alcun modo l'unica scelta possibile di  $\mathcal{H}$ ; altrettanto ammissibile sarebbe qualsiasi espressione scalare, come

$$L(p)\psi(x)M(p)\varphi(x)N(p) + \text{compl. coniug.}$$

in cui  $L(p)$ ,  $M(p)$ ,  $N(p)$  rappresentano opportune funzioni del momento della particella pesante. Siccome per altro le conseguenze della (10) si sono fino ad ora mostrate in accordo con l'esperienza, sembra inutile ricorrere per il momento ad espressioni più complicate.

È essenziale invece generalizzare la (10) in modo da poter trattare relativisticamente per lo meno le particelle leggere. Naturalmente, anche in questa generalizzazione, non sembra possibile procedere senza una certa arbitrarietà. La soluzione più naturale del problema sembra tuttavia essere la seguente: Relativisticamente si hanno, in luogo di  $\psi$  e di  $\varphi$ , due quaterne  $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$  e  $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$  di funzioni di DIRAC. Consideriamo le 16 combinazioni bilineari indipendenti di  $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$  e  $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$ . Quando il sistema di riferimento subisce una trasformazione di LORENTZ, le 16 combinazioni bilineari subiscono una sostituzione lineare, che dà una rappresentazione del gruppo di LORENTZ. In particolare le quattro combina-

zioni bilineari

$$(11) \quad \begin{aligned} A_0 &= -\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1 + \psi_3\varphi_4 - \psi_4\varphi_3 \\ A_1 &= \psi_1\varphi_3 - \psi_2\varphi_4 - \psi_3\varphi_1 + \psi_4\varphi_2 \\ A_2 &= i\psi_1\varphi_3 + i\psi_2\varphi_4 - i\psi_3\varphi_1 - i\psi_4\varphi_2 \\ A_3 &= -\psi_1\varphi_4 - \psi_2\varphi_3 + \psi_3\varphi_2 + \psi_4\varphi_1 \end{aligned}$$

si trasformano come le componenti di un quadrivettore, e cioè come le componenti del quadripotenziale elettromagnetico. È quindi naturale introdurre nella Hamiltoniana della particella pesante le quattro grandezze

$$g(QA_i + Q^*A_i^*)$$

in una situazione corrispondente a quella delle componenti del quadripotenziale. Incontriamo qui una difficoltà dipendente dal fatto che non è conosciuta una equazione d'onda relativistica per le particelle pesanti. Tuttavia, nel caso in cui la velocità della particella pesante sia piccola rispetto a  $c$ , si potrà limitarsi al termine che corrisponde ad  $eV$  ( $V$  potenziale scalare) e scrivere

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} &= g[Q(-\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1 + \psi_3\varphi_4 - \psi_4\varphi_3) + \\ &+ Q^*(-\psi_1^*\varphi_2^* + \psi_2^*\varphi_1^* + \psi_3^*\varphi_4^* - \psi_4^*\varphi_3^*)]. \end{aligned}$$

A questo termine debbono aggiungersene altri dell'ordine di grandezza  $v/c$ . Per il momento però noi trascureremo questi termini, dato che le velocità dei neutroni e dei protoni nei nuclei sono generalmente piccole in confronto a  $c$  (Cfr. § 9).

Con la scrittura simbolica delle matrici, la (12) può scriversi

$$(13) \quad \mathcal{H} = g[Q\tilde{\Psi}^*\delta\varphi + Q^*\tilde{\Psi}\delta\varphi^*]$$

dove  $\psi$  e  $\varphi$  debbono intendersi scritte come matrici di una sola colonna, e il segno  $\tilde{\phantom{x}}$  trasforma una matrice nella coniugata trasposta; inoltre è

$$(14) \quad \tilde{\delta} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Con queste notazioni si trova, dal confronto di (12) e (9),

$$(15) \quad c_{s\sigma} = g\tilde{\Psi}_s^*\delta\varphi_\sigma; \quad c_{s\sigma}^* = g\tilde{\Psi}_s\delta\varphi_\sigma^*$$

dove  $\psi_s$  e  $\varphi_s$  rappresentano le autofunzioni normalizzate a quattro componenti degli stati  $s$  dell'elettrone e  $\sigma$  del neutrino, prese come funzioni della posizione  $x, y, z$ , occupata dalla particella pesante.

### La matrice di perturbazione.

§ 4. Con la Hamiltoniana che abbiamo stabilita si può svolgere una teoria della disintegrazione  $\beta$  in completa analogia alla teoria dell'irradiazione. In questa, la funzione di HAMILTON consiste, come è noto, della somma: Energia dell'atomo + Energia del campo di radiazione + Interazione tra atomo e radiazione; quest'ultimo termine viene considerato come una perturbazione degli altri due. Analogamente prenderemo

$$(16) \quad H_{pes} + H_{leg}$$

come Hamiltoniana imperturbata. La perturbazione è rappresentata dal termine di interazione (13).

Gli stati quantici del sistema imperturbato possono numerarsi al modo seguente:

$$(17) \quad (\rho, n, N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots)$$

in cui il primo numero  $\rho$  prende uno dei valori  $\pm 1$ , e indica se la particella pesante è un neutrone o un protone. Il secondo numero  $n$  indica lo stato quantico del neutrone o del protone. Per  $\rho = +1$  (neutrone) la corrispondente autofunzione sia

$$(18) \quad u_n(x)$$

mentre per  $\rho = -1$  (protone) la autofunzione sia

$$(19) \quad v_n(x).$$

Gli altri numeri  $N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots$  possono prendere solo i valori 0,1 e indicano quali stati degli elettroni e dei neutrini sono occupati.

Dall'esame della forma generale (9) dell'energia di perturbazione, si vede immediatamente che essa ha elementi di matrice diversi da zero solo per transizioni in cui o la particella pesante passa da neutrone a protone, mentre contemporaneamente si creano un elettrone e un neutrino, o viceversa.

Per mezzo di (1) (3) (5) (9) (18) (19) si trova facilmente che l'elemento di matrice corrispondente è

$$(20) \quad \mathcal{H} \begin{matrix} 1nN_1 N_2 \dots 0_s \dots M_1 M_2 \dots 0_\sigma \dots \\ -1mN_1 N_2 \dots 1_s \dots M_1 M_2 \dots 1_\sigma \dots \end{matrix} = \pm \int v_m^* c_{s\sigma}^* u_n d\tau$$

dove l'integrazione deve estendersi a tutto lo spazio delle configurazioni della particella pesante (ad eccezione della coordinata  $\rho$ ); il

segno  $\pm$  significa più precisamente

$$(-1)^{N_1+N_2+\dots+N_{s-1}+M_1+M_2+\dots+M_{\sigma-1}}$$

e sparisce del resto dai calcoli che seguiranno. Alla transizione opposta corrisponde un elemento di matrice complesso coniugato di (20).

Tenendo conto delle (15), la (20) diviene:

$$(21) \quad \mathcal{H}_{-1m1s1\sigma}^{1n0s0\sigma} = \pm g \int v_m^* u_n \tilde{\psi}_s \delta\varphi_\sigma^* d\tau$$

ove per brevità abbiamo ommesso di scrivere nel primo membro tutti gli indici che non subiscono una variazione.

### Teoria delle disintegrazioni $\beta$ .

§ 5. Una disintegrazione  $\beta$  consiste in un processo in cui un neutrone nucleare si trasforma in un protone, mentre contemporaneamente, col meccanismo che abbiamo descritto, vengono emessi un elettrone, che si osserva come particella  $\beta$ , e un neutrino. Per calcolare la probabilità di questo processo, ammetteremo che, al tempo  $t = 0$ , si abbia un neutrone in uno stato nucleare di autofunzione  $u_n(x)$ , e che inoltre lo stato elettronico  $s$  e lo stato di neutrino  $\sigma$  siano liberi, cioè:  $N_s = M_\sigma = 0$ . Per  $t = 0$  dunque si potrà prendere eguale a 1 la ampiezza di probabilità dello stato  $(1, n, 0_s, 0_\sigma)$ , cioè

$$(22) \quad a_{1, n, 0_s, 0_\sigma} = 1$$

mentre l'ampiezza di probabilità dello stato  $(-1, m, 1_s, 1_\sigma)$ , in cui il neutrone si è trasformato in un protone con autofunzione  $v_m(x)$  emettendo un elettrone e un neutrino negli stati  $s$  e  $\sigma$  inizialmente nulla.

Applicando le consuete formule della teoria delle perturbazioni, si trova, per un tempo abbastanza corto perchè (22) sia ancora approssimativamente valida,

$$(23) \quad a_{-1, m, 1_s, 1_\sigma} = -\frac{2\pi i}{\hbar} \mathcal{H}_{-1m1s1\sigma}^{1n0s0\sigma} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(-W+H_s+K_\sigma)t}$$

dove con  $W$  si è indicata la differenza di energia tra lo stato del neutrone e quello del protone.

Integrando (23) otteniamo (siccome per  $t = 0$ ,  $a_{-1m1s1\sigma} = 0$ )

$$(24) \quad a_{-1m1s1\sigma} = -\mathcal{H}_{-1m1s1\sigma}^{1n0s0\sigma} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(-W+H_s+K_\sigma)t} \frac{-1}{-W+H_s+K_\sigma}.$$

La probabilità della transizione considerata è dunque

$$(25) \quad \left| a_{-1m1_s1_\sigma} \right|^2 = 4 \left| \mathcal{K}_{-1m1_s1_\sigma}^{1n0_s0_\sigma} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi t}{\hbar} (-W + H_s + K_\sigma)}{(-W + H_s + K_\sigma)^2}.$$

Per calcolare la vita media dello stato neutronico  $u_n$  occorre sommare (25) rispetto a tutti gli stati non occupati degli elettroni e dei neutrini. Una notevole semplificazione di questa somma si ottiene osservando che la lunghezza d'onda di DE BROGLIE per elettroni o neutrini aventi energie di alcuni milioni di Volt è notevolmente più grande delle dimensioni nucleari. Si può dunque, in prima approssimazione, considerare le autofunzioni  $\psi_s$  e  $\varphi_\sigma$  come costanti entro l'estensione del nucleo. (21) diventa così

$$(26) \quad \mathcal{K}_{-1m1_s1_\sigma}^{1n0_s0_\sigma} = \pm g \tilde{\psi}_s \tilde{\varphi}_\sigma^* \int v_m^* u_n d\tau$$

dove qui e nel seguito  $\psi_s$  e  $\varphi_\sigma$  debbono intendersi prese nel nucleo (Cfr. § 8). Da (26) si ricava:

$$(27) \quad \left| \mathcal{K}_{-1m1_s1_\sigma}^{1n0_s0_\sigma} \right|^2 = g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \tilde{\psi}_s \tilde{\varphi}_\sigma^* \tilde{\varphi}_\sigma \tilde{\psi}_s.$$

Gli stati  $\sigma$  del neutrino sono individuati dal loro impulso  $p_\sigma$  e dalla direzione dello spin. Se, per comodità di normalizzazione, quantizziamo entro un volume  $\Omega$ , le cui dimensioni si faranno in seguito tendere all'infinito, le autofunzioni normalizzate del neutrino sono onde piane di DIRAC con densità  $1/\Omega$ . Facili considerazioni algebriche permettono allora di effettuare in (27) la media rispetto a tutte le orientazioni di  $p_\sigma$  e dello spin. (In ciò sono da considerarsi solo gli stati di energia positiva; gli stati di energia negativa debbono eliminarsi con un artificio simile alla teoria dei buchi di DIRAC). Si trova

$$(28) \quad \overline{\left| \mathcal{K}_{-1m1_s1_\sigma}^{1n0_s0_\sigma} \right|^2} = \frac{g^2}{4\Omega} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \left( \tilde{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \tilde{\psi}_s \beta \psi_s \right)$$

in cui  $\mu$  è la massa di quiete del neutrino, e  $\beta$  è la matrice di DIRAC

$$(29) \quad \beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Osservando che il numero degli stati di neutrino con energia positiva e momento compreso tra  $p_\sigma$  e  $p_\sigma + dp_\sigma$  è  $8\pi\Omega p_\sigma^2 dp_\sigma/h^3$ ; che

inoltre  $\partial K_\sigma / \partial p_\sigma = v_\sigma$ ,  $v_\sigma$  essendo la velocità del neutrino nello stato  $\sigma$ ; e infine che (25) ha un massimo assai pronunziato per quel valore di  $p_\sigma$  per cui non si ha variazione dell'energia imperturbata, per cui cioè:

$$(30) \quad -W + H_s + K_\sigma = 0$$

si può effettuare nel modo consueto <sup>(1)</sup> la somma di (25) rispetto a  $\sigma$  e si trova

$$(31) \quad t \cdot \frac{8\pi^3 g^2}{h^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left( \tilde{\Psi}_s \Psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \tilde{\Psi}_s \beta \Psi_s \right)$$

$p_\sigma$  essendo il valore del momento del neutrino per cui vale la (30).

### Elementi determinativi della probabilità di transizione.

§ 6. (31) esprime la probabilità che nel tempo  $t$  abbia luogo una disintegrazione  $\beta$  in cui l'elettrone viene emesso nello stato  $s$ . Come deve essere, tale probabilità risulta proporzionale al tempo ( $t$  è stato supposto piccolo in confronto alla vita media); il coefficiente di  $t$  dà la probabilità di transizione per il processo indicato; essa risulta:

$$(32) \quad P_s = \frac{8\pi^3 g^2}{h^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left( \tilde{\Psi}_s \Psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \tilde{\Psi}_s \beta \Psi_s \right).$$

Si osservi che:

a) Per gli stati liberi dei neutrini si ha sempre  $K_\sigma \geq \mu c^2$ . È dunque necessario, affinché la (30) possa essere soddisfatta, che sia

$$(33) \quad H_s \leq W - \mu c^2.$$

Al segno  $=$  corrisponde il limite superiore dello spettro dei raggi  $\beta$ .

b) Essendo poi per gli stati elettronici non occupati  $H_s \geq mc^2$ , si ottiene, perchè la disintegrazione  $\beta$  sia possibile, la seguente condizione:

$$(34) \quad W \geq (m + \mu)c^2.$$

Nel nucleo si deve dunque avere uno stato neutronico occupato abbastanza elevato al di sopra di uno stato protonico libero perchè l'emissione  $\beta$  sia possibile.

<sup>(1)</sup> Per la descrizione dei metodi che si usano per eseguire tali somme, cfr. qualsiasi articolo riassuntivo sulla teoria dell'irradiazione. P. es. E. FERMI «Rev. of Mod. Phys» 4, 87, 1932.

c) Secondo (32)  $P_s$  dipende dalle autofunzioni  $u_n$  e  $v_m$  della particella pesante nel nucleo, attraverso all'elemento di matrice

$$(35) \quad Q_{mn}^* = \int v_m^* u_n d\tau.$$

Questo elemento di matrice ha, nella teoria dei raggi  $\beta$ , una funzione analoga a quella dell'elemento di matrice del momento elettrico nella teoria dell'irradiazione. L'elemento di matrice (35) ha normalmente l'ordine di grandezza 1; accade tuttavia spesso che, per particolari simmetrie delle autofunzioni  $u_n$  e  $v_m$ ,  $Q_{mn}^*$  viene ad annullarsi esattamente. In questi casi parleremo di *transizioni  $\beta$  proibite*. Non si deve per altro attendersi che le transizioni proibite siano veramente impossibili, poichè (32) è soltanto una formula approssimata. Ritorneremo sopra questo argomento nel § 9.

### La massa del neutrino.

§ 7. La probabilità di transizione (32) determina tra l'altro la forma dello spettro continuo dei raggi  $\beta$ . Discuteremo qui come la forma di questo spettro dipende dalla massa di quiete del neutrino, in modo da poter determinare questa massa da un confronto con la forma sperimentale dello spettro stesso. La massa  $\mu$  interviene in (32) tra l'altro nel fattore  $p_\sigma^2/v_\sigma$ . La dipendenza della forma della curva di distribuzione dell'energia da  $\mu$ , è marcata specialmente in vicinanza della energia massima  $E_0$  dei raggi  $\beta$ . Si riconosce facilmente che la curva di distribuzione per energie  $E$  prossime al valore massimo  $E_0$ , si comporta, a meno di un fattore indipendente da  $E$ , come

$$(36) \quad \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} = \frac{1}{c^3} (\mu c^2 + E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 + 2\mu c^2(E_0 - E)}.$$

Nella fig. 1 la fine della curva di distribuzione è rappresentata per  $\mu = 0$ , e per un valore piccolo e uno grande di  $\mu$ . La maggiore somiglianza con le curve sperimentali si ha per la curva teorica corrispondente a  $\mu = 0$ . Arriviamo così a concludere che la massa del neutrino è uguale a zero o, in ogni caso, piccola in confronto della massa dell'elettrone <sup>(1)</sup>. Nei calcoli che seguono porremo per semplicità  $\mu = 0$ .

Abbiamo allora, tenendo anche conto della (30),

$$(37) \quad v_\sigma = c; \quad K_\sigma = cp_\sigma; \quad p_\sigma = \frac{K_\sigma}{c} = \frac{W - H_s}{c}$$

<sup>(1)</sup> In una recente notizia F. PERRIN, «C. R.», **197**, 1625, 1933, giunge con argomenti quantitativi a una simile conclusione.

e le disequaglianze (33) e (34) diventano:

$$(38) \quad H_s \leq W; \quad W \geq mc^2$$

Infine la probabilità di transizione (32) prende la forma

$$(39) \quad P_s = \frac{8\pi^3 g^2}{c^3 \hbar^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \tilde{\psi}_s \psi_s (W - H_s)^2.$$

### Vita media e forma della curva di distribuzione dell'energia per transizioni permesse.

§ 8. Dalla (39) si può ricavare una formula che esprime quante transizioni  $\beta$ , in cui la particella  $\beta$  riceve un impulso compreso tra  $mc\eta$  e  $mc(\eta + d\eta)$ , hanno luogo nell'unità di tempo. Per questo occorre calcolare la somma dei valori di  $\tilde{\psi}_s \psi_s$  nel nucleo, estesa a tutti gli stati (del continuo) che appartengono all'intervallo di impulso indicato. Si noti a questo proposito che le autofunzioni relativistiche

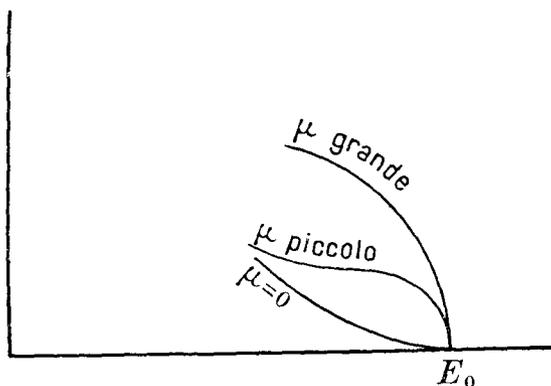


Fig. 1

in campo coulombiano per gli stati con  $j = 1/2$  ( ${}^2s_{1/2}$  e  ${}^2p_{1/2}$ ) diventano infinite nel centro. D'altra parte la legge di Coulomb non è valida fino al centro del nucleo, ma solo fino a una distanza da questo maggiore di  $R$ ,  $R$  essendo il raggio nucleare. Ora un calcolo di orientamento dimostra che, se si fanno ipotesi plausibili sopra l'andamento del potenziale elettrico nell'interno del nucleo, il valore di  $\tilde{\psi}_s \psi_s$  nel centro del nucleo risulta assai prossimo a quello che  $\tilde{\psi}_s \psi_s$  assumerebbe, nel caso della legge di Coulomb, a distanza  $R$  dal centro. Applicando le note formule <sup>(1)</sup> per le autofunzioni rela-

<sup>(1)</sup> R. H. HULME, «Proc. Roy. Soc.» **133**, 381, 1931.

tivistiche dello spettro continuo in campo Coulombiano, si trova con un calcolo un po' lungo ma privo di difficoltà,

$$(40) \quad \sum_{d\eta} \tilde{\Psi}_s \Psi_s = d\eta \cdot \frac{32\pi m^3 c^3}{h^3 [\Gamma(3+2S)]^2} \left( \frac{4\pi mcR}{h} \right)^{2S} \eta^{2+2S} e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left( 1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2$$

dove si è posto

$$(41) \quad \gamma = Z/137; \quad S = \sqrt{1-\gamma^2} - 1.$$

La probabilità di transizione in uno stato elettronico in cui l'impulso abbia valore appartenente all'intervallo  $mc d\eta$  diventa dunque (39)

$$(42) \quad P(\eta)d\eta = d\eta \cdot g^2 \frac{256\pi^4}{[\Gamma(3+2S)]^2} \frac{m^5 c^4}{h^7} \left( \frac{4\pi mcR}{h} \right)^{2S} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \eta^{2+2S} \times \\ \times e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left( 1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2 (\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2})^2$$

dove  $\eta_0$  rappresenta l'impulso massimo dei raggi  $\beta$  emessi, misurato in unità  $mc$ .

Per la valutazione numerica di (42) riferiamoci al valore particolare  $\gamma = 0,6$ , che corrisponde a  $Z = 82,2$ , poichè i numeri atomici delle sostanze radioattive non sono lontani da questo valore. Per  $\gamma = 0,6$ , si ha da (41)  $S = -0,2$ . Si trova inoltre che, per  $\eta < 10$ , può porsi, con approssimazione sufficiente

$$(43) \quad \eta^{1,6} e^{0,6\pi \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left( 0,8 + 0,6i \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2 \cong 4,5\eta + 1,6\eta^2$$

La (42) diviene con ciò, ponendo in essa  $R = 9.10^{-13}$ ,

$$(44) \quad P(\eta)d\eta = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 (\eta + 0,355\eta^2) (\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2})^2$$

L'inversa della vita media si ottiene integrando (44) da  $\eta = 0$  fino a  $\eta = \eta_0$ ; si trova

$$(45) \quad \frac{1}{\tau} = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 F(\eta_0)$$

dove si è posto

$$(46) \quad F(\eta_0) = \frac{2}{3} \sqrt{1+\eta_0^2} - \frac{2}{3} + \frac{\eta_0^4}{12} - \frac{\eta_0^2}{3} + \\ + 0,355 \left[ -\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0^3}{12} + \frac{\eta_0^5}{30} + \frac{\sqrt{1+\eta_0^2}}{4} \log(\eta_0 + \sqrt{1+\eta_0^2}) \right].$$

Per piccoli valori dell'argomento,  $F(\gamma_0)$  si comporta come  $\gamma_0^6/24$ ; per argomenti maggiori i valori di  $F$  sono raccolti nella tabella seguente

TABELLA I

$\gamma_0$	$F(\gamma_0)$	$\gamma_0$	$F(\gamma_0)$	$\gamma_0$	$F(\gamma_0)$	$\gamma_0$	$F(\gamma_0)$
0	$\gamma_0^6/24$	2	1,2	4	29	6	185
1	0,03	3	7,5	5	80	7	380

### Le transizioni proibite.

§ 9. Prima di passare al confronto della teoria con l'esperienza vogliamo ancora illustrare alcune proprietà delle transizioni  $\beta$  proibite.

Come già abbiamo detto, una transizione è proibita quando è nullo il corrispondente elemento di matrice (35). Se la rappresentazione del nucleo per stati quantici individuali dei protoni e dei neutroni rappresenta una buona approssimazione, l'elemento di matrice  $Q_{mn}^*$  si annulla, per ragione di simmetria, quando non sia

$$(47) \quad i = i'$$

$i$  ed  $i'$  essendo il momento della quantità di moto, in unità  $\hbar/2\pi$ , dello stato neutronico  $u_n$  e dello stato protonico  $v_m$ . Nel caso in cui gli stati quantici individuali non siano una buona approssimazione, alla regola di selezione (47) corrisponde l'altra

$$(48) \quad I = I'$$

dove  $I$  e  $I'$  rappresentano il momento del nucleo prima e dopo la disintegrazione  $\beta$ .

Le regole di selezione (47) e (48) sono assai meno rigorose delle regole di selezione dell'ottica. Si possono avere delle eccezioni da esse specialmente coi due seguenti processi:

a) La formula (26) è stata ottenuta trascurando le variazioni di  $\psi_s$  e  $\varphi_s$  entro l'estensione del nucleo. Se invece si tiene conto di tali variazioni, si ha una possibilità di ottenere transizioni  $\beta$  anche quando  $Q_{mn}^*$  si annulla. Si riconosce facilmente che l'intensità di queste transizioni sta, come ordine di grandezza, a quella dei processi permessi, nel rapporto  $(R/\lambda)^2/\lambda$ , essendo la lunghezza d'onda di DE BROGLIE delle particelle leggere. Si noti che, a parità di ener-

gia di un elettrone e di un neutrino, l'energia cinetica del primo, quando si trova in vicinanza del nucleo, è, a causa dell'attrazione elettrostatica, molto maggiore, e quindi l'effetto più importante deriva dalle variazioni di  $\psi_s$ . Una valutazione d'ordine di grandezza dell'intensità di questi processi proibiti mostra che essi, a parità dell'energia degli elettroni emessi, debbono essere un centinaio di volte meno intensi dei processi normali.

Oltre alla intensità relativamente piccola, una caratteristica di transizioni proibite di questo tipo è da ricercarsi nella differente forma della curva di distribuzione dell'energia dei raggi  $\beta$ , che, per transizioni proibite, deve dare un numero di particelle con piccola energia minore che nel caso normale.

b) Una seconda possibilità che avvengano transizioni  $\beta$  proibite dalla regola di selezione (48) dipende dal fatto, già notato alla fine del § 3, che, quando la velocità dei neutroni e dei protoni non sia trascurabile di fronte alla velocità della luce, debbono aggiungersi al termine di interazione (12) altri termini dell'ordine  $v/c$ . Se p. es. si ammettesse anche per le particelle pesanti una equazione d'onda relativistica del tipo di DIRAC, si potrebbero aggiungere a (12) termini come

$$(49) \quad gQ(\alpha_x A_1 + \alpha_y A_2 + \alpha_z A_3) + \text{complesso coniugato}$$

$\alpha_x \alpha_y \alpha_z$  essendo le consuete matrici di DIRAC per la particella pesante e  $A_1 A_2 A_3$  le componenti spaziali del quadrivettore definito dalle (11).

Un termine del tipo (49) permette anche dei passaggi  $\beta$  che non soddisfano la regola di selezione (48), e la loro intensità è, rispetto a quella dei processi normali, dell'ordine di grandezza  $(v/c)^2$  e cioè all'incirca 1/100. Troviamo così una seconda possibilità di transizioni proibite circa 100 volte meno intense di quelle normali.

### Confronto con l'esperienza.

§ 10. La (45) stabilisce una relazione tra l'impulso massimo  $\eta_0$  dei raggi  $\beta$  emessi da una sostanza e la sua vita media. In questa relazione interviene invero anche un elemento incognito, l'integrale

$$(50) \quad \int v_m^* u_n d\tau$$

la cui valutazione richiede la conoscenza delle autofunzioni nucleari  $u_n$  e  $v_m$  del neutrone e del protone. Nel caso delle transizioni permesse tuttavia, (50) è dell'ordine di grandezza dell'unità. Ci atten-

diamo dunque che il prodotto

$$(51) \quad \tau F(\eta_0)$$

abbia lo stesso ordine di grandezza per tutte le transizioni permesse. Per le transizioni proibite invece la vita media sarà, come ordine di grandezza, cento volte maggiore, e corrispondentemente sarà maggiore anche il prodotto (51). Nella tabella seguente sono raccolti i prodotti  $\tau F(\eta_0)$  per tutte le sostanze che si disintegrano emettendo raggi  $\beta$  per le quali si hanno dati sufficientemente esatti.

TABELLA II

Elemento	$\tau$ (in ore)	$\eta_0$	$F(\eta_0)$	$\tau F(\eta_0)$
<i>UX<sub>2</sub></i>	0,026	5,4	115	3,0
<i>RaB</i>	0,64	2,04	1,34	0,9
<i>ThB</i>	15,3	1,37	0,176	2,7
<i>ThC''</i>	0,076	4,4	44	3,3
<i>AcC''</i>	0,115	3,6	17,6	2,0
<i>RaC</i>	0,47	7,07	398	190
<i>RaE</i>	173	3,23	10,5	1800
<i>ThC</i>	2,4	5,2	95	230
<i>MsTh<sub>2</sub></i>	8,8	6,13	73	640

In questa tabella sono senz'altro riconoscibili i due gruppi che avevamo attesi; del resto una tale divisione degli elementi che emettono raggi  $\beta$  primari in due gruppi, era già stata osservata per via empirica da SARGENT <sup>(1)</sup>. I valori di  $\eta_0$  sono stati presi dal lavoro citato di SARGENT (per confronto si noti che è:  $\eta_0 = (H\rho)_{max}/1700$ ). Oltre ai dati riportati nella tabella, SARGENT dà i dati per altri tre elementi, avvertendo che essi non sono altrettanto attendibili come gli altri. Essi sono: *UX<sub>1</sub>* per cui si ha  $\tau = 830$ ;  $\eta_0 = 0,76$ ;  $F(\eta_0) = 0,0065$ ;  $\tau F(\eta_0) = 5,4$ ; questo elemento sembra dunque doversi attribuire al primo gruppo. Per *AcB* si ha:  $\tau = 0,87$ ;  $\eta_0 = 1,24$ ;  $F(\eta_0) = 0,102$ ;  $\tau F(\eta_0) = 0,09$ ; si trova dunque un valore di  $\tau F(\eta_0)$  circa dieci volte più piccolo di quelli del primo grup-

(1) B. W. SARGENT, «Proc. Roy. Soc.», **139**, 659, 1933.

po. Infine per il *Ra D* si ha:  $\tau = 320000$ ;  $\eta_0 = 0,38$  (assai incerto);  $F(\eta_0) = 0,00011$ ;  $\tau F(\eta_0) = 35$ . Questo elemento viene quindi a essere situato circa a metà tra i due gruppi. Non mi è riuscito trovare dati sopra gli altri elementi che emettono raggi  $\beta$  primari, e cioè *Ms Th<sub>1</sub>*, *U Y*, *Ac*, *AcC*, *U Z*, *Ra C''*.

Nel complesso si può concludere da questo confronto tra teoria ed esperienza che la concordanza è certo altrettanto buona quanto

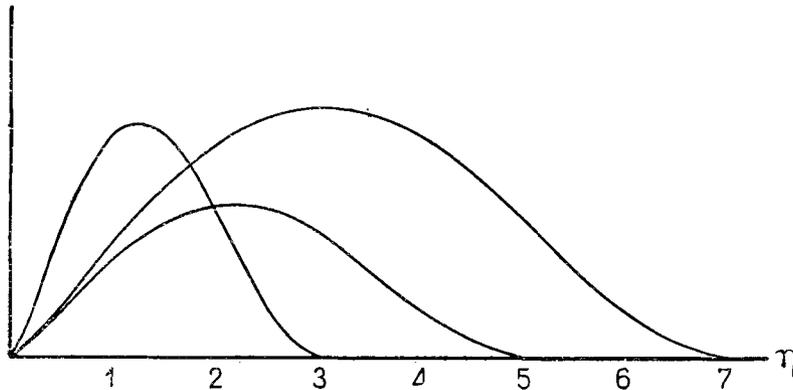


Fig. 2

si sarebbe potuto attendersi. La divergenze osservate per gli elementi su cui si hanno dati sperimentali incerti, *Ra D* e *Ac B*, possono bene spiegarsi parte con la imprecisione delle misure, parte anche con oscillazioni perfettamente plausibili nel valore dell'elemento di matrice (50). Deve inoltre osservarsi che il fatto che la maggior parte delle disintegrazioni  $\beta$  sono accompagnate da emissione di raggi  $\gamma$ , sta ad indicare che la maggior parte dei processi  $\beta$  può lasciare il protone in differenti stati di eccitazione, ciò che dà ancora un meccanismo che può determinare delle oscillazioni nel valore di  $\tau F(\eta_0)$ .

Dai dati della tabella II si può ricavare una valutazione, se pure assai grossolana, della costante  $g$ . Se si ammette per esempio che, quando l'elemento di matrice (50) ha valore 1, si abbia  $\tau F(\eta_0) = 1$  ora = 3600 sec., si trova da (45):

$$g = 4 \cdot 10^{-50} \text{ cm}^3 \cdot \text{erg.}$$

valore che, naturalmente, non dà nulla più dell'ordine di grandezza.

Passiamo a discutere la forma della curva di distribuzione delle velocità dei raggi  $\beta$ . Nel caso dei processi permessi, la curva di distribuzione, in funzione di  $\eta$  (cioè, a meno del fattore 1700, di  $H\varphi$ ) è rappresentata nella fig. 2, per vari valori dell'impulso massimo  $\eta_0$ .

Le curve sono soddisfacentemente simili a quelle sperimentali raccolte da SARGENT <sup>(1)</sup>. Solo nel tratto di piccola energia le curve di SARGENT sono un po' più basse di quelle teoriche, ciò che è meglio visibile nelle curve della fig. 3 in cui come ascisse sono prese le energie invece degli impulsi. Deve notarsi però che la parte delle curve di piccola energia è assai imperfettamente conosciuta sperimentalmente <sup>(2)</sup>. Inoltre, per le transizioni proibite, anche teoricamente il tratto di piccola energia deve essere più basso che non per le curve relative alle transizioni permesse, rappresentate nelle figg. 2 e 3. Di

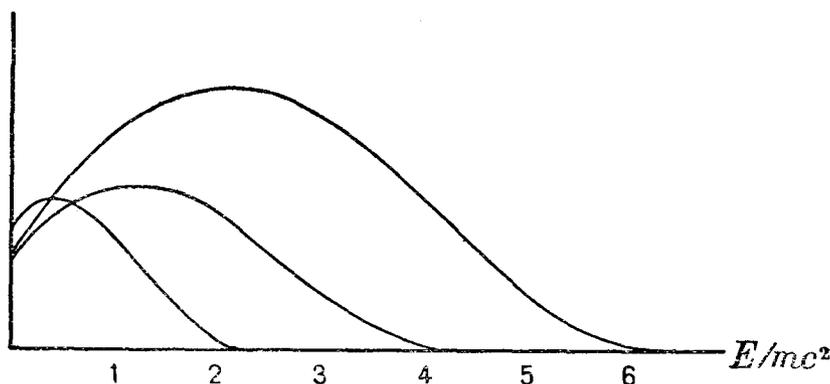


Fig. 3

questo si deve particolarmente tener conto per il caso del  $Ra E$ , che è quello meglio conosciuto dal lato sperimentale. La emissione dei raggi  $\beta$  di questo elemento, come risulta dal valore anormalmente grande di  $\tau F(\tau_0)$  (Cfr. Tabella II) è certo proibita, anzi è possibile che essa sia permessa soltanto in seconda approssimazione. Spero di potere, in una prossima comunicazione, precisare meglio l'andamento delle curve di distribuzione per transizioni proibite.

Riassumendo sembra giustificato affermare che la teoria, nella forma in cui la abbiamo qui esposta, si trova in accordo con i dati sperimentali, i quali per altro non sono sempre molto precisi. Se anche del resto, in un ulteriore confronto della teoria con l'esperienza, si dovesse arrivare a delle contraddizioni, sarebbe sempre possibile modificare la teoria senza alterarne essenzialmente i fondamenti

<sup>(1)</sup> B. W. SARGENT, «Proc. Camb. Phil. Soc.», **28**, 538, 1932.

<sup>(2)</sup> Cfr. p. es. RUTHERFORD, ELLIS e CHADWICK, Radiations from Radioactive Substances, Cambridge, 1930. V. in particolar modo a pag. 407.

concettuali. Si potrebbe precisamente conservare l'equazione (9) scegliendo però in modo diverso le  $c_{s\sigma}$ . Ciò porterebbe in particolare a una diversa forma della regola di selezione (48), e a una diversa forma della curva di distribuzione dell'energia.

Solo un ulteriore sviluppo della teoria, come anche un aumento nella precisione dei dati sperimentali, potranno indicare se una tale modificazione si renderà necessaria.

---